UNIVERSITE MOHAMED I

Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques
Et Informatique
O u j d a

**Année Universitaire 2005/06**
**Section : SMP-SMC ($S_1$)**
**Session de Janvier**

## Examen Math1 (algèbre)

**Execice: 1** *(Questions de cours.)*

1. *Soit la fraction rationnelle*

$$F = \frac{Q}{(X^2-1)(X^2+1)}, \; Q \in \mathbb{R}[X].$$

*Donner la forme de la décomposition en élements simples de la fraction $F$ dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.*

2. *Soient $B$, $B'$ deux bases d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie sur un corps $K$. On note par $M_1$(resp. $M_2$) la matrice de passage de $B$ à $B'$(resp. la matrice de passage de $B'$ à $B$).*
*Donner sans démonstration la relation liant $M_1$ et $M_2$.*

**Execice: 2**

1. *Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle*

$$F = \frac{X}{(X-2)^5(X-1)}$$

2. *Même question pour*

$$G = \frac{X^2+X+1}{(X-1)^3}.$$

**Execice: 3** *Soit le $\mathbb{R}-e.v.\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, et $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (x-z, y+z, x+y+z) \end{array}$$

1. *Montrer que $f$ est une application linéaire. Donner la matrice de $f$ dans la base $B$.*
2. *Déterminer Ker $f$, et en déduire Im $f$. Que peut-on dire de La famille $\{f(e_i), 1 \leq i \leq 3)\}$ ?*
3. *Soient $v_1 = e_2 + e_3,\ v_2 = e_1 + e_3,\ v_3 = e_2$. Montrer que $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
4. *Donner la matrice de passage de $B$ à $B'$ et la matrice de passage de $B'$ à $B$.*
5. *Donner la matrice de $f$ dans la base $B'$.*